2.3. Одномерное движение в однородном поле

Рассмотрим одномерное движение частицы с массой m под действием постоянной силы F. Потенциальная энергия частицы в этом случае имеет вид

$$V(x) = -Fx. \tag{2.23}$$

Определим энергии и волновые функции стационарных состояний частицы в поле (2.23).

Стационарное уравнение Шредингера для такого движения имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi(x)}{\mathrm{d}x^2} - Fx\Psi(x) = E\Psi(x). \tag{2.24}$$

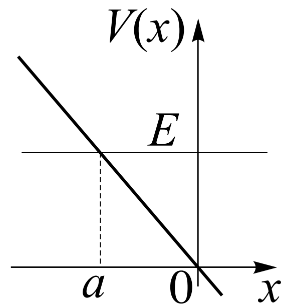

Рис. 2.4.

Классическое движение частицы в потенциале (2.23) ограничено только *слева* точкой поворота $a = -E/F$ (рис. 2.4). Поэтому движение инфинитно в одну сторону ($x \to +\infty$), а энергетический спектр непрерывный и невырожденный. Граничные условия, налагаемые на $\Psi(x)$:

$$\Psi(-\infty) = 0; \quad \Psi(+\infty) \text{ ограничено.}$$

Заменой переменных $\xi = \left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3}\left(x + \frac{E}{F}\right)$ при заданном E уравнение (2.24) приводится к уравнению Эйри

$$\Phi''(\xi) + \xi\Phi(\xi) = 0 \tag{2.25}$$

с граничными условиями

$$\Phi(-\infty) = 0; \quad \Phi(+\infty) \text{ ограничено}, \tag{2.26}$$

где $\Phi(\xi) = \Psi(x)$.

Решение уравнения (2.25) с граничными условиями (2.26) выражается через функцию Эйри (см. приложение Г):

$$\Phi(\xi) = C\mathrm{Ai}(-\xi). \tag{2.27}$$

Мы не будем здесь выписывать явный вид нормировочной константы C.

В дальнейшем нам понадобится асимптотический вид (2.27) вдали от точек поворота ($|\xi| \gg 1$), который может быть получен из известных асимптотических выражений для функций Бесселя:

$$\begin{aligned} &\text{при } \xi \to -\infty \qquad \Phi(\xi) \simeq \frac{C}{2|\xi|^{1/4}} \exp\left[-\frac{2}{3}\,|\xi|^{3/2}\right]; \\ &\text{при } \xi \to +\infty \qquad \Phi(\xi) \simeq \frac{C}{\xi^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}\,\xi^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$